

УДК 531.2

А.А. Ордин, Ю.А. Антонов

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Закон линейных деформаций, установленный Р. Гуком в 1678 г., представляет собой линейную зависимость между силой F , приложенной к брусу, и удлинением бруса ΔL :

$$\bar{F} = -k \cdot \Delta \bar{L} \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости.

Спустя 150 лет, в 1822 г. О. Коши ввел понятие напряжения и в настоящее время закон Гука во всех учебниках по сопротивлению материалов выглядит следующим образом [1-2]:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

где σ – нормальное напряжение, E – модуль Юнга, ε – продольная деформация бруса, L – первоначальная длина бруса.

Как правило, нормальное напряжение определяется как отношение внутренней продольной силы ($N=F$) к первоначальной площади сечения бруса ($\sigma = F / A_0$). Однако, известно, что продольная деформация (ε) бруса всегда сопровождается поперечной деформацией (ε'), то есть, например, удлинение бруса под действием растягивающей нагрузки всегда сопровождается уменьшением его поперечного сечения. Поэтому факти-

ческие напряжения, возникающие в брусе, всегда будут отличаться от напряжений, определенных по отношению к первоначальной площади сечения бруса. Например, при растяжении бруса квадратного сечения с размерами $(a \cdot a \cdot L)$ фактические напряжения равны:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{(a - \Delta a)^2} > \sigma_0 = \frac{F}{a^2} \quad (3)$$

Выразим изменение ширины (Δa) бруса через коэффициент Пуассона:

$$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{\varepsilon} = \frac{\Delta a \cdot L}{a \cdot \Delta L},$$

откуда

$$\Delta a = \mu a \frac{\Delta L}{L} = \mu a \varepsilon \quad (4)$$

Подставим это значение в формулу (3):

$$\sigma = \frac{F}{(a - \Delta a)^2} = \frac{F}{a^2 (1 - \mu \varepsilon)^2} \quad (5)$$

и, учитывая формулы (2, 3), получаем нелинейную зависимость нормальных фактических напряжений от продольной деформации при одноосном растяжении бруса:

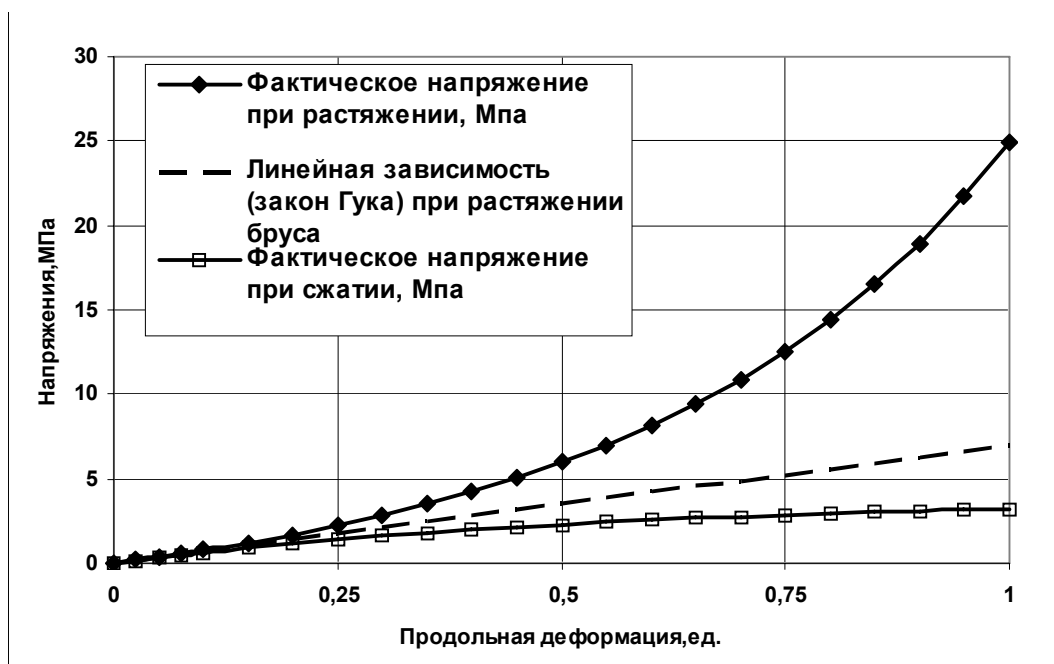


Рис. 1. Изменения напряжения при растяжении-сжатии бруса

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1 - \mu\varepsilon)^2} = \frac{E\varepsilon}{(1 - \mu\varepsilon)^2} \quad (6)$$

Аналогично, при одноосном сжатии бруса эта зависимость приобретает вид:

$$\sigma = \frac{F}{(a + \Delta a)^2} = \frac{E\varepsilon}{(1 + \mu\varepsilon)^2} \quad (7)$$

Зависимости, выражающие линейный закон Гука и нелинейные изменения фактических напряжений от продольной деформации, приведены на рис. 1.

Как следует из формул (6, 7), линейного закона изменения напряжений от продольной деформации, даже в области малых значений деформаций, практически, не существует. Таким образом, линейная зависимость нагрузки от удлинения бруса или закон Гука существует только в форме (1), а при переходе к зависимости «напряжение – деформация» закон Гука является нелинейным.

Следует отметить, что линейная зависимость (2) напряжений от продольной деформации не является корректной, так как она получается из формулы (1) путем деления на площадь сечения, а левая часть делится на площадь сечения, а правая часть – на длину бруса:

$$\frac{F}{A} = \frac{k \cdot \Delta L}{L} \quad (8)$$

что, в принципе, неверно с математической точки зрения. Корректный переход к напряжениям приводит к следующей зависимости:

$$\frac{F}{AL} = \frac{k \cdot \Delta L}{AL}; \quad \frac{\sigma}{L} = \frac{k\varepsilon}{A}; \quad \sigma = k\varepsilon \frac{L}{A} = \frac{k \cdot \Delta L}{A} \quad (9)$$

а с учетом изменения площади квадратного сечения бруса:

1) при растяжении:

$$\sigma = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 - \mu\varepsilon)^2} = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 - \mu \frac{\Delta L}{L})^2} \quad (10)$$

2) при сжатии:

$$\sigma = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 + \mu\varepsilon)^2} = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 + \mu \frac{\Delta L}{L})^2} \quad (11)$$

Таким образом, при переходе к напряжениям линейный закон Гука меняет свою форму и напряжения нелинейно зависят от продольной деформации и удлинения бруса.

При изучении напряжений в косых сечениях бруса при одноосном растяжении-сжатии обычно делается вывод об отсутствии напряжений в продольных сечениях бруса. Этот вывод делается на основе разложения продольной силы и соответствующего напряжения на нормальную и касательную составляющие на косом сечении бруса, про-

веденным под углом (α) к поперечному сечению [1-4]:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = 0,5 \sin 2\alpha \quad (12)$$

откуда, в частности, следует:

$$\text{при } \alpha = 0 \quad \sigma_\alpha = \sigma_0, \quad \tau_\alpha = 0;$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \quad \sigma_\alpha = 0; \quad \tau_\alpha = 0.$$

Однако, при этом упускается из виду, что продольная деформация всегда сопровождается изменением площади сечения бруса или поперечной деформацией, которая в свою очередь, в соответствии с законом Гука, вызывает появление «вторичных» напряжений в продольных сечениях бруса. Поэтому при анализе напряженного состояния бруса при одноосном растяжении – сжатии необходимо переходить к объемной постановке задачи:

1) при растяжении:

$$\sigma_x = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 - \mu \frac{\Delta L}{L})^2}; \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = -\mu\sigma_z \quad (13)$$

2) при сжатии:

$$\sigma_x = \frac{k \cdot \Delta L}{a^2(1 + \frac{\Delta L}{L})^2}; \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = \mu\sigma_z \quad (14)$$

Таким образом, при растяжении бруса в его поперечных сечениях возникают «первичные» напряжения растяжения (σ_x), но из-за уменьшения его сечения продольные волокна, надавливая друг на друга, приводят к появлению «вторичных» напряжений сжатия, которые по сути являются касательными напряжениями (τ_{zx} , τ_{zy}) в поперечном сечении стержня.

При анализе объемного напряженного состояния возникает закономерный вопрос о механизме превращения продольных деформаций в поперечные. На наш взгляд, причиной появления поперечных деформаций и «вторичных» напряжений в продольных сечениях бруса является стремление всех природных живых и неживых систем к минимуму потенциальной энергии или в данном случае энергии деформации бруса. Этот принцип минимума потенциальной энергии природных систем известен давно. Об этом говорил в свое время Л.Эйлер: «... в мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

При растяжении бруса, работа, затрачиваемая на этот процесс, приводит к возрастанию его энергии деформации и, так как брус не имеет возможности уменьшить ее путем сокращения длины, он понижает эту энергию путем уменьшения своего поперечного сечения.

Из теоретической механики известно, что минимуму потенциальной энергии системы всегда соответствует ее равновесное состояние, которое можно анализировать методами статики, состав-

ля уравнения равновесия всех действующих на систему сил. По сути дела, при растяжении бруса он переходит первоначально в неустойчивое, неравновесное состояние, которое затем при уменьшении поперечного сечения вновь становится равновесным. Брус принимает новую форму с устойчивым, равновесным состоянием, хотя и с повышенной энергией деформации. При дальнейшем растяжении бруса этот процесс его удлинения в продольном направлении и сжатия в поперечном сечении повторяется вновь, и всякий раз брус принимает новую оптимальную форму, при которой существует равновесное состояние, соответствующее минимуму энергии деформации.

Силовой механизм формирования поперечной деформации

Покажем на модели кристаллической решетки (модели «шариков с пружинками») силовой механизм формирования поперечной деформации при одноосном растяжении. Представим брус в виде плоской кристаллической решетки, состоящей из девяти молекул $A, B, C, D, E, G, K, M, N$, между которыми существуют внутренние молекулярные силы (рис.2). Линейные размеры между соседними молекулами в кристаллической решетке: $a \times a$, то есть $AB = BC = AD = DK = a$. Линия AK бруса жестко закреплена. Брус растягивается силой F так, что линия CN перемещается в положение C_1N_1 на расстояние dL .

Рассмотрим изменение положения одной из молекул, находящейся в точке B . В этом исходном положении молекула B находится в равновесии, на брус первоначально не действуют никакие внешние силы и сумма всех внутренних сил, действующих на молекулу B со стороны молекул A, C, D, G равна нулю.

При перемещении точки C в положение C_1 точка B перемещается в оптимальное положение B_1 на расстояние $0,5dL$ так, что расстояние $AB_1 = BC_1$ и силы, действующие на нее со стороны точек A и C_1 по линии AC_1 уравновешены: $F_1 = -F_2$

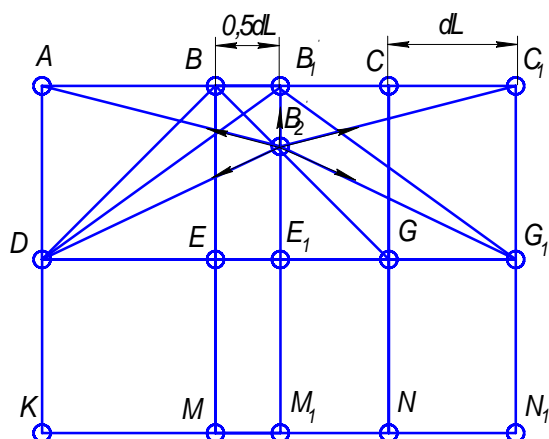


Рис.2. Модель равновесного состояния одной из молекул (точка B) кристаллической решетки при растяжении бруса

(рис.3а).

Силы F_3 и F_4 , действующие на точку B_1 со стороны точек D и G_1 , возникают вследствие удлинения первоначальных расстояний DB и BG до расстояний DB_1 и BG_1 . Их геометрическая сумма создает равнодействующую силу: $R = F_3 + F_4$, которая перемещает точку B_1 в положение B_2 . При этом появляется растягивающая сила F_5 между точками B_1E_1 , которая возрастает по мере продвижения точки B_1 в сторону B_2 , то есть «тормозит» ее продвижение вглубь бруса (рис.3б).

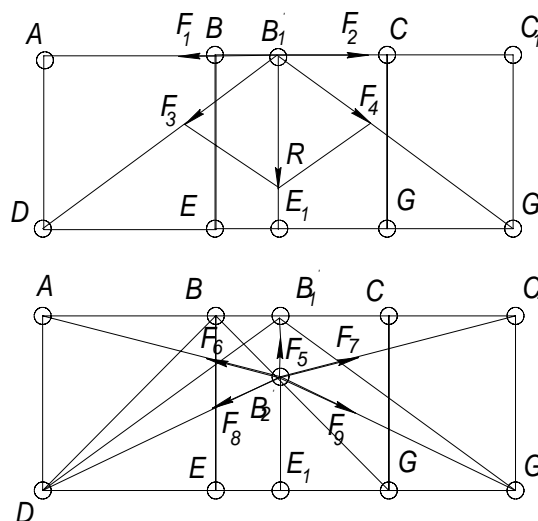


Рис.3. Силовой механизм формирования поперечной деформации в кристаллической решетке бруса: а) неравновесное состояние молекулы B в положении B_1 , б) равновесное состояние молекулы B в положении B_2

Точка B_2 находится в равновесии под действием пяти сил F_5-F_9 (рис.3), геометрическая сумма которых равняется нулю. Эти внутренние силы возникают вследствие удлинения расстояний AB, DB, CB, GB до расстояний соответственно AB_2, DB_2, CB_2, GB_2 и уменьшения расстояния E_1B_1 до расстояния E_1B_2 . При этом, если бы не возникла сила F_5 между молекулами B_1E_1 , то равновесие соблюдалось бы при положении точки B_2 в середине отрезка B_1E_1 , то есть сжатие продолжалось бы до величины $\Delta a = 0,5a$, где a – расстояние между молекулами B_1 и E_1 . Но так как при этом всегда возникает «тормозящая» сила F_5 между молекулами B_1 и E_1 то реально уменьшение поперечного размера будет меньше этой величины: $\Delta a < 0,5a$.

Из этих рассуждений следует, что при упругих деформациях растяжения сжатие бруса в поперечном направлении не может превосходить предельного значения: $\Delta a = 0,5a$. Но тогда поперечная деформация ε' не может быть больше 0,5 при любых удлинениях бруса, что является известным фактом [1-2].

Энергетический механизм поперечной деформации

Из теоретической механики известно, что сила (F) является первой производной от потенциальной энергии (E) по перемещению (x). Поэтому рассмотренное силовое равновесие молекулы в кристаллической решетке, по сути дела, является признаком существования минимума энергии деформации стержня:

$$\sum \bar{F}(x_i) = -\frac{\partial E(x_i)}{\partial x_i} = 0 \text{ при } E(x_i) \Rightarrow \min$$

Покажем, что величину продольной деформации можно определить теоретически, используя принцип минимума энергии деформации стержня [5].

Полная энергия деформации при растяжении-сжатии бруса применительно к нашей задаче определяется в соответствии с законом Гука (1) и теоремой Клапейрона [1-4]:

$$E = 0,5F(\Delta L) \cdot \Delta L = 0,5k(\Delta L)^2 \quad (15)$$

Первоначально докажем, что молекула В при растяжении стержня на величину ΔL вначале займет оптимальное положение в точке В₁, расположенной на расстоянии $x=0,5\Delta L$ от точки В (рис.1).

Суммарную энергию деформации молекул по оси АС можно выразить в виде:

$$E(X) = 0,5k(0,5L + x)^2 + 0,5k(0,5L - x + \Delta L)^2 \Rightarrow \min, \quad (16)$$

где L – первоначальная длина стержня АС, x – оптимизируемое перемещение молекулы В.

Дифференцируя эту функцию и решая уравнение:

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} = k(0,5L + x) - k(0,5L - x + \Delta L) = 0 \quad (17)$$

получаем искомое решение: $x=0,5\Delta L$.

Энергия деформации в этой точке В₁ имеет локальный минимум. Однако, это положение молекулы не является окончательным, так как на нее действуют также и силы со стороны молекул D, E₁, G₁. Поэтому молекула из положения В₁ начинает далее перемещаться в положение В₂, в котором суммарная энергия деформации достигает глобального минимума.

Обозначим: y – расстояние В₁В₂, на которое смещается молекула из положения В₁ в положение В₂ при поперечной деформации бруса (рис.3). Покажем, что расстояние В₁В₂ можно определить, минимизируя полную энергию деформации бруса.

Формализуем полную энергию деформации бруса (15), учитывая ее функциональную зависимость от удлинений отдельных ребер кристаллической решетки. В результате преобразований целевая функция полной энергии деформации сводится к минимуму функции квадратов суммарных удлинений или сжатий ребер кристаллической решетки в зависимости от оптимизируемого расстояния x :

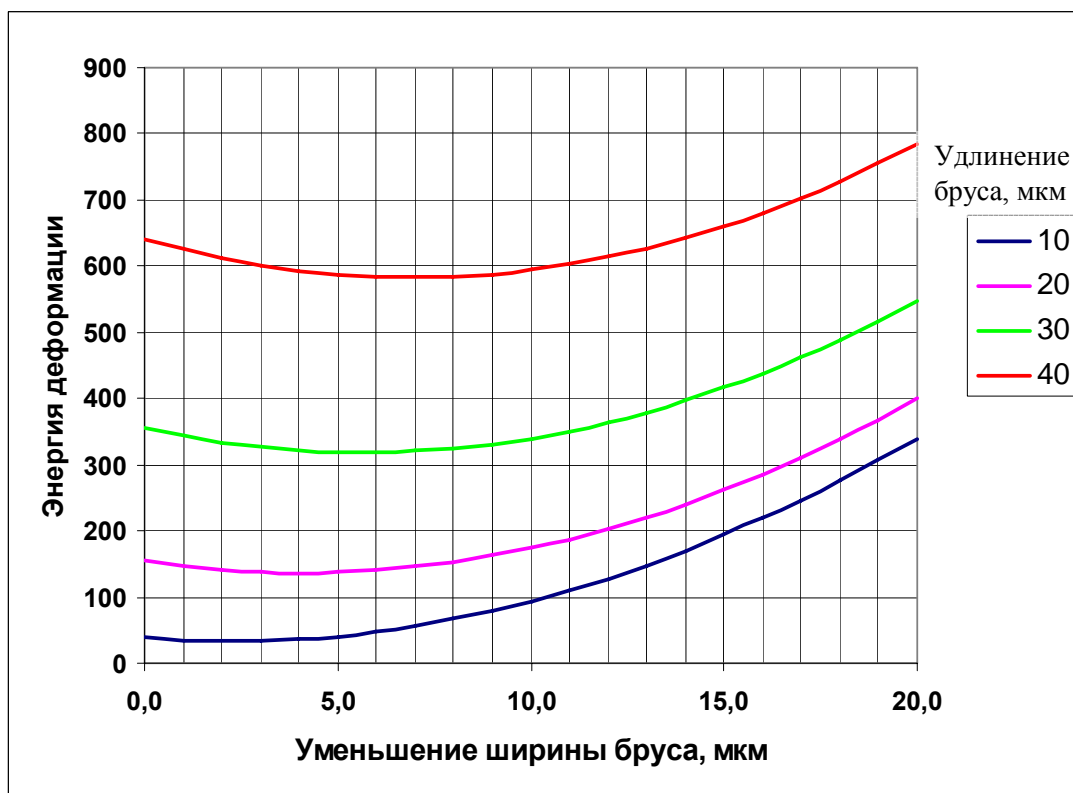


Рис.4. Энергетические кривые поперечной деформации бруса

$$\begin{aligned}
 E(y) &= 0,5k \sum_{i=1}^5 (\Delta L_i)^2 = 0,5k(2(DB_2 - DB)^2 + \\
 &\quad + 2(AB_2 - AB)^2 + (B_1B_2)^2) = \\
 &= \left(\sqrt{(a + 0,5\Delta L)^2 + (a - y)^2} - a\sqrt{2} \right)^2 + \\
 &+ \left(\sqrt{(a + 0,5\Delta L)^2 + y^2} - a \right)^2 + 0,5y^2 \Rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Как показали расчеты, эта целевая функция имеет минимум, которому соответствует оптимальное расстояние (y_0) сжатия бруса в поперечном направлении. Так, расчеты показывают, что при удлинении бруса на 10 мкм минимум энергии деформации будет соответствовать уменьшению

ширины половины бруса на 2 мкм (нижняя кривая энергии деформации), при удлинении бруса на 20 мкм минимум энергии деформации соответствует уменьшению ширины на 4 мкм, при удлинении бруса на 30 мкм его ширина сократится на 6 мкм и при удлинении бруса на 40 мкм его ширина сократится на 7 мкм.

Эти расчеты соответствуют сжатию поперечного сечения только одной, верхней части бруса. Так как нижняя часть бруса ведет себя при его растяжении точно так же, то с учетом нижней части бруса общее снижение поперечных размеров бруса удваивается.

Таким образом, формализуя и минимизируя зависимость полной энергии деформации от изменяющихся размеров бруса можно теоретически определить значения поперечной деформации и оптимальные размеры сечения бруса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Учеб. для вузов – М.: Высш. шк., 2000.-560 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. -М.: 1986. 534 с.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1965. – 650 с.
4. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2000.-361 с.
5. Пустовой Н.В., Расторгуев Г.И. Оптимальное проектирование стержней и подкрепленных пластин на основе минимизации энергии деформации. Новосибирск, НГТУ, 2002. 317 с.

□ Авторы статьи:

Ордин
Александр Александрович.
– докт. техн. наук, проф. каф. прикладной механики Новосибирского государственного технического университета
Тел. 89139105717, e-mail: ordin@cn.ru

Антонов
Юрий Анатольевич
– канд. техн. наук, доц. каф.
«Горные машины и комплексы»
КузГТУ.